

Matematica Finanziaria – Giugno 2008

Esercizio 1

Un portafoglio è formato da uno zero coupon bond non rischioso (il cui prezzo è pari a 91) con scadenza biennale e valore di rimborso pari a 100 nonché da due call ed una put dotate dei seguenti parametri:

$$A = K = 100; u = 1,10; d = 1/u; i = 0,05; T = 2$$

Calcolare:

- il valore del portafoglio in $t = 0$;
- il *TIR* atteso del portafoglio usando come probabilità le pseudo-probabilità risk neutral;
- i valori a scadenza del portafoglio complessivo.

Risoluzione.

Lo scadenziario dello zcb è $(91; 100) / (0; 2)$.

Determiniamo i valori a scadenza ($T = 2$) del sottostante:

$$A_{uu} = A \cdot u^2 = 121,00$$

$$A_{ud} = A \cdot u \cdot d = 100,00$$

$$A_{dd} = A \cdot d^2 = 82,64$$

I pay off a scadenza della call e della put valgono rispettivamente:

$$C_{uu} = \max(A_{uu} - K; 0) = 21,00$$

$$C_{ud} = \max(A_{ud} - K; 0) = 0,00$$

$$C_{dd} = \max(A_{dd} - K; 0) = 0,00$$

$$P_{uu} = \max(K - A_{uu}; 0) = 0,00$$

$$P_{ud} = \max(K - A_{ud}; 0) = 0,00$$

$$P_{dd} = \max(K - A_{dd}; 0) = 17,36$$

mentre la probabilità risk neutral vale:

$$\pi = \frac{1+i-d}{u-d} = 0,7381 \rightarrow 73,81\%$$

Possiamo ora calcolare il prezzo dell'opzione call e put:

$$C = \frac{\pi^2 \cdot C_{uu} + 2\pi \cdot (1 - \pi) \cdot C_{ud} + (1 - \pi)^2 \cdot C_{dd}}{(1 + i)^2} = 10,3768$$

$$P = \frac{\pi^2 \cdot P_{uu} + 2\pi \cdot (1 - \pi) \cdot P_{ud} + (1 - \pi)^2 \cdot P_{dd}}{(1 + i)^2} = 1,0798$$

Il valore del portafoglio all'epoca *zero* vale, tenendo conto delle quote di composizione date:

$$V_0 = 1 \cdot 91 + 2 \cdot C + 1 \cdot P = 112,83$$

Il valore all'epoca *due* vale, nei tre casi possibili:

$$V_2(uu) = 1 \cdot 100 + 2 \cdot C_{uu} + 1 \cdot P_{uu} = 142,00$$

$$V_2(ud) = 1 \cdot 100 + 2 \cdot C_{ud} + 1 \cdot P_{ud} = 100,00$$

$$V_2(dd) = 1 \cdot 100 + 2 \cdot C_{dd} + 1 \cdot P_{dd} = 117,36$$

Infine, il valore atteso a scadenza utilizzando le probabilità risk neutral sarà:

$$V_2(att) = \pi^2 \cdot V_2(uu) + 2\pi \cdot (1 - \pi) \cdot V_2(ud) + (1 - \pi)^2 \cdot V_2(dd) = 124,07$$

Il TIR atteso sarà perciò:

$$TIR = \sqrt{\frac{V_2(att)}{V_0}} - 1 = 0,0486 \rightarrow 4,86\%$$

Esercizio 2

Un'azienda ha in corso i seguenti finanziamenti.

A. Deve restituire 1 milione di Euro versando 10 rate annue di importo pari a 129.504,6.

B. Deve restituire 0,75 milioni di Euro versando 7 rate annue di importo pari a 134.351,3.

Una finanziaria gli offre la possibilità di ristrutturare i debiti sostituendoli con il versamento di 15 rate annue costanti che comportano in termini di tasso un aggravio dell'1%.

Calcolare la rata in questione.

Risoluzione.

Lo scadenziario del finanziamento A è:

$(1.000.000; -129.504,6; -129.504,6; -129.504,6; -129.504,6; -129.504,6;$
 $-129.504,6; -129.504,6; -129.504,6; -129.504,6; -129.504,6) /$
 $(0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10)$

Lo scadenziario del finanziamento B è:

$(750.000; -134.351,3; -134.351,3; -134.351,3; -134.351,3; -134.351,3;$
 $-134.351,3; -134.351,3; 0; 0; 0) / (0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10)$

Lo scadenziario del debito complessivo è:

$(1.750.000; -263.855,9; -263.855,9; -263.855,9; -263.855,9; -263.855,9;$
 $-263.855,9; -263.855,9; -129.504,6; -129.504,6; -129.504,6) /$
 $(0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10)$

Il tasso di costo (indicato con i) si ottiene risolvendo la seguente equazione di equilibrio finanziario:

$$1.750.000 = 263.855,9 \cdot a_{\overline{7}|i} + 129.504,6 \cdot (1+i)^{-7} \cdot a_{\overline{3}|i}$$

Utilizzando il metodo dell'interpolazione lineare, abbiamo $i \approx 5,36\%$.

Il versamento di 15 rate costanti equivalenti (di importo R) dovrà perciò soddisfare la relazione:

$$1.750.000 = R \cdot a_{\overline{15}|0,0636} \Rightarrow R = \frac{1.750.000}{a_{\overline{15}|0,0636}} = \frac{1.750.000}{9,4869} = 184.464,69$$

Esercizio 3

Un imprenditore prende a prestito da un intermediario finanziario ogni sei mesi 750.000 euro su cui paga interessi al 7% in capitalizzazione semplice con capitalizzazione degli stessi a fine anno.

Reinveste le tranche di finanziamento al tasso $J(2)$ pari all'8,5% in capitalizzazione composta.

Calcolare il saldo residuo netto dell'investimento dopo due anni.

Risoluzione.

L'interesse maturato all'epoca due in capitalizzazione semplice è pari a:

$$750.000 \cdot 0,07 \cdot (1,5 + 1 + 0,5) = 157.500$$

L'imprenditore dovrà quindi rimborsare all'epoca due un capitale pari a

$$4 \cdot 750.000 + 157.500 = 3.157.500$$

Conoscendo $J(2)$, possiamo dedurre $i_{1/2} = 0,0425$. Il reinvestimento delle tranches di finanziamento produrrà all'epoca due un montante pari a:

$$750.000 \cdot (1,0425^3 + 1,0425^2 + 1,0425^1 + 1) = 3.196.726,32$$

Di conseguenza, il saldo residuo netto dell'investimento dopo due anni è:

$$3.196.726,32 - 3.157.500 = +39.226,32$$